№13 дәріс сабағы

Ығыстырылмаған орнықты бағалар. Бас дисперсия. Таңдамалық дисперсия. Үлестірімнің нүктелік бағалары.

α- X кездейсоқ шамасының үлестірімінің белгісіз параметрі болсын. Онда $\alpha \approx \alpha^*$ жуықтауында қолданылған

$$\alpha^* = \alpha^*(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

статистикалық таңдама бойынша белгісіз параметрдің бағасы (нүктелік бағасы) деп аталады.

Бағалар классификациясы

$M\alpha^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha$ теңдігі орындалатындай сынақ нәтижелерінің артық немесе кем мәндерін бермейтін болсын. Онда осындай қасиеті бар α^* бағасы жылжытылмаған деп аталады. Керісінше жағдайда жылжыған деп аталады.

Егер $n \to \infty$ болғанда α^* бағасы α параметрінің айқын мәніне ұмтылатын болса,

$$\alpha^* = \alpha^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha,$$

онда α^* бағасы келісті бағасы деп аталады.

Келістілік дегеніміз көлемнің артуына қарағанда бағаның сапасының көлемі өсетін болуы. Егер α_1^* және α_2^* бағалары $M(\alpha_1^* - \alpha)^2 < M(\alpha_2^* - \alpha)^2$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда α_1^* бағасы α_2^* бағасына қарағанда эффективті деп аталады. Егер α^* бағасы басқаларға қарағанда тым эффективті болса, онда эффективті баға ретінде соны алуға болады.

Бағаларды алу әдістері

1. Моменттер әдісі. X - бір өлшемді белгісіз α параметрінен тәуелді $f(x, \alpha)$ үлестірім тығыздығы бар үзіліссіз кездейсоқ шама болсын. Онда $M(X)$ математикалық күтімі α параметрінің функциясы болады:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \alpha) dx = \mu_1(\alpha).$$

Таңдамалық орташа $M(X)$ мәніне жуық мәнді $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ қабылдайды. Бұл α белгісіз параметрін анықтайтын теңдеуді жазуға мүмкіндік береді:

$$\mu_1(\alpha) = \overline{x}.$$

Моменттер әдісі осы түрде дискретті кездейсоқ шамаларға да қолданылады.

2. Максималды шындыққа ұқсас әдіс. X дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы

$$P(X = a_i) = p_i(\alpha),\ i = 1,2,\dots,k,$$

мұндағы a_i - X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері; $p_i(\alpha)$ - α белгісіз параметрінен тәуелді сәйкес ықтималдықтар және кез-келген α-ның мәнінде

$\sum_{i=1}^{k} p_i(\alpha) = 1$ теңдігін қанағаттандырады. X кездейсоқ шамасының a_i мәндерінің жиыны тек ақырлы ғана емес, сонымен саналымды да болуы мүмкін.

Егер бақылауға алынған таңдамалы мәндердің ішінде $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сан n_i $(i = 1,2,\dots,k)$ рет кездесетін болса, онда ықтималдық үшін $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha)$ өрнектің түрі мынандай болады: $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = p_1^{n_1}(\alpha) p_2^{n_2}(\alpha) \dots p_k^{n_k}(\alpha)$.

Бұл функция α параметрінің шындыққа ұқсас функциясы деп аталады, ал α^* мәні $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha)$ функциясының максимум қабылдайтын мәні, α белгісіз параметрінің максималды шындыққа ұқсас бағасы.

α белгісіз параметрінің $f(x,\alpha)$ үлестірім тығыздығы бар X үзіліссіз кездейсоқ шамасы үшін максималды шындыққа ұқсас әдісі өз күшінде болады. Өзгешелігі шындыққа ұқсас $L(x_1, x_2, ..., x_n; \alpha) = p(x_1, \alpha) \cdot p(x_2, \alpha) \cdot ... \cdot p(x_n, \alpha)$ функциясы берілген таңдаманың ықтималдығы арқылы емес, ал $x_1, x_2, \dots, x_a$ шамалары мен α параметрінен тәуелді үлестірім тығыздығымен өрнектеледі. α таңдап алынған $x_1, x_2, ..., x_n$ мәндерінің аргументтің ролін атқарады.

Кездейсоқ шаманың сандық мінездемелерін жуықтап есептейтін формулаларға тоқталайық. Математикалық күтімді жуықтап есептейтін формуланы жоғарыда қарастырдық. $\sigma^2 = D(X)$ дисперсия үшін жуықтап есептеу формуласы:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \bar{x}_k \right)^2 .$$

S^2 саны эмпирикалық (таңдамалық) дисперсия деп аталады.

Егер $M(X) \approx \bar{x}$ екені нақты көрініп тұрса, онда $\sigma^2 \approx S^2$ теңдігінде $\frac{1}{n}$ көбейткішінің орнына неге $\frac{1}{n-1}$ көбейткіші тұрғаны таңқалдырады. Бұл жуықтау теңдіктері қарастырылып отырған кездейсоқ шаманың $M(X)$ және $\sigma^2 = D(X)$ параметрлерінің нүктелік бағалары деп аталады. Кездейсоқ шаманың тәжірибеде бақыланған x_n мәндерінің өзі кездейсоқ. Бұл кездейсоқ шамалардың да қабылдайтын мәндері осы X-тің қабылдайтын мәндерімен бірдей және осы X сияқты үлестірілген. Сондықтан да, $M(X) = M(x_k)$ және $D(X) = D(x_k) = \sigma^2$ теңдігі кез-келген k үшін орынды. Зерттеулердің нәтижесінде алынған мәндерді кездейсоқ шамалар ретінде қарастыру нүктелік бағаларға қойылатын талапты тұжырымдауға мүмкіндік береді. Параметрдің нүктелік бағалары мынадай үш қасиетке ие: орнықтылық, келістілік және эффективтілік.